

Kopf und Zahl

JOURNAL

des Vereins für Lerntherapie und Dyskalkulie e.V.
in Zusammenarbeit mit den Mathematischen Instituten
zur Behandlung der Rechenschwäche

38. AUSGABE, Herbst 2023

www.dyskalkulie.de



Hürden beim Erlernen des Rechnens abbauen. Aber wie? Probleme und praktische Anregungen

Christian Bussebaum,
Kinder- und Jugendlichenpsychotherapeut, Integrativer
Dyskalkulietherapeut (ev. FH Bochum/TÜV Akademie) am
MLI Düsseldorf, ILSA-Lernentwicklung

Einleitung

Zu Beginn der ersten Klasse wollen Kinder in aller Regel gerne rechnen lernen. „Ich kann schon $50 + 50$ rechnen“ ist da die Aussage und das Ergebnis stimmt: 100. Aber haben diese Kinder wirklich verstanden, was Zahlen und Rechenoperationen, geschweige denn Zehner oder Hunderter sind?

Laut Frau Prof. Kristin Krajewskij von der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg haben über 20 % aller eingeschulten Kinder nicht den Entwicklungsstand, den es benötigen würde, um einem regulären, auf Schulbüchern basierenden Unterricht zu folgen. Und diese Zahlen sind aus Vor-Inklusionszeiten, rechnen Sie also mit einem deutschlandweiten Durchschnitt von ca. sechs (!) Kindern pro Schulklasse, die ab dem ersten Tag der ersten Klasse einen dringenden Förderbedarf in Mathematik haben und so sehr sie sich auch mühen, die Inhalte selbst der ersten Seiten eines Schulbuches Mathematik nicht verstehen können, da ein zu ausgeprägter Entwicklungsrückstand im mathematischen Denken vorliegt. Zudem hat der Distanzunterricht der Corona-Jahre und das verbreitete Nicht-Besuchen der Kitas in dieser Zeit die Problemlage eher noch verschärft.

Der deutsche Bildungsbericht, der vor den Weihnachtsferien 2022 erschienen ist, nennt zudem die Zahl von über 20 % aller Kinder, die Ende der vierten Klasse mathematisches Basiswissen der Klassen eins und zwei nicht abgesichert haben, aber dennoch wenige Wochen später mit den mathematischen Anforderungen der fünfte Klasse konfrontiert werden.

Aber auch diese Kinder mit ausgeprägten Problemen beim Erlernen des Rechnens, Kinder mit einem solchen Entwicklungsrückstand, Kinder mit einer Rechenschwäche, können rechnen lernen. Ich möchte im Folgenden zentrale Hürden beim Erlernen des Rechnens aufzeigen und möglichst leicht umsetzbare Hinweise dazu geben, wie diese Hürden zumindest deutlich reduziert werden können.

In diesem Artikel komme ich nicht ohne Mut zur Lücke aus. Auf **ILSA-Lernentwicklung** können Sie daher von der Material-Seite Videos herunterladen, die einige der ausgeführten Überlegungen vertiefen und weitere Diskussionsanregungen und unterrichtspraktische Hinweise bieten.

I. Die Brücke zur Kita bauen (Kompetenzebenen 2 und 3 aufbauen und absichern)

In Deutschland sind Kita und Schule deutlich voneinander getrennte Institutionen und glücklicherweise spricht zwar heute (hoffentlich)

Inhalt

Hürden beim Erlernen des Rechnens abbauen. Aber wie?	
Probleme und praktische Anregungen . . .	1
Impressum	11



beim Schulbeginn niemand mehr vom Ernst des Lebens, der jetzt beginnt, aber dass Kinder sich von nun an anders benehmen sollen, wird selbst in den Überzeugungen der den verschiedenen Institutionen angehörenden Pädagogen deutlich: Vor der Einschulung lernen Kinder gemäß vorschulischem Credo primär im Spiel und durch Abschauen. Was aber sollen die Kinder in der Schule nicht mehr tun? Spielen und Abschauen. Vielleicht ist das etwas verkürzt formuliert, aber der erste Brückenschlag zwischen Kita und Schule – bezogen auf mathematisches Lernen – sollte sein, dass in der Schule zu Beginn des ersten Schuljahres mehr über Spiele gelernt wird und umgekehrt Vorschulkinder in der Kita schon einmal ein Arbeitsblatt in der Hand hatten und wissen, dass dies z. B. möglichst komplett bearbeitet werden sollte.



Nun gibt es natürlich auch einen inhaltlich sachlogischen Brückenschlag: Kinder sollen dort abgeholt werden, wo sie stehen. Aber wo im mathematischen Entwicklungsprozess stehen sie denn, sollten sie denn stehen, wenn sie in die Schule kommen?

Prof. Krajewski verweist in ihrer Darstellung vorschulischer mathematischer Entwicklung darauf, dass Rechenschwächen meistens aus einem vorschulischen Entwicklungsrückstand im mathematischen Denken resultieren, der sich zu Beginn der Grundschulzeit verfestigt:

„Neben dieser angeborenen Fähigkeit lernen bereits etwa Zweijährige verschiedene Zahlworte aufzusagen. Zu dieser Zeit besitzen sie jedoch noch kein Verständnis dafür, dass Zahlworte für Mengen (Stückzahlen) stehen. Zahlworte und Mengen werden also noch nicht miteinander in Verbindung gebracht (**Kompetenzebene 1**).

Die Verknüpfung von Zahlworten mit Mengen (**Kompetenzebene 2**) erfolgt erst später. Hierbei verstehen Kinder zunächst, dass manche Zahlworte (z. B. drei, eins) für „wenig“ stehen, andere Zahlworte mit dem Begriff „viel“ in Verbindung gebracht werden können (z. B. „zwanzig“), und wieder andere Zahlworte „sehr viel“ repräsentie-

ren. Wenn sie eine solche – noch ungenaue – Zuordnung von Zahlworten und Mengenbegriffen vornehmen können, werden sie auch bald fähig sein, eng nebeneinander liegende Zahlworte – genau – hinsichtlich ihrer exakten Größe bzw. ihrer Stückzahlen miteinander zu vergleichen. Schon manche dreijährigen Kinder verfügen über diese zweite Kompetenzebene, die eine „Mengenbewusstheit von Zahlen“ widerspiegelt und die entscheidend ist für die Entwicklung eines arithmetischen Verständnisses.

Wie Untersuchungen mit Grundschulkindern zeigen, haben jedoch Kinder mit Rechenschwierigkeiten diesen Entwicklungsschritt oft selbst in der Grundschulzeit noch nicht vollzogen. Dieser Entwicklungsschritt ist jedoch entscheidend, um zu erkennen, dass sich Zahlen aus anderen Zahlen zusammensetzen lassen und dass der Unterschied zwischen zwei Zahlen wieder eine Zahl ist. (**Kompetenzebene 3**). Diese Grundprinzipien der Zahlen, die schon manche Vierjährige verstanden haben, bleiben rechenschwachen Kindern oft noch lange Zeit ein Rätsel.“¹

Welcher Schluss kann hier bereits gezogen werden? Sie benötigen, um den Standort der Kinder zu bestimmen, um sie abholen zu können, ein kurzes, praktisch leicht durchführbares **Interview zur Überprüfung des vorschulischen mathematischen Kenntnisstandes** der Kinder. Hier möchte ich – bewusst sehr knapp gehalten, damit es in Kita und Schule ca. vier bis fünf Monate vor Schulbeginn praktiziert werden kann – ein Interview vorschlagen, das Frau Krajewskis Entwicklungsdarstellung einbezieht:

1. Legen Sie Ziffernkärtchen der 3, 5 und 8 aus, die Kinder sollen Ihnen dazu die passenden Fingerbilder zeigen.
2. „Zähle mal von 6 an weiter.“ ... „Jetzt zähle von 7 an weiter.“ ... „Nun zähle von 7 rückwärts.“

Es kommt hierbei keinesfalls darauf an, dass Kinder möglichst schnell, möglichst weit zählen, bremsen Sie eher den elterlichen Elan, der dies befördert, denn Schnellzähler können sich keine Mengen, Anzahlen, zu ihrem Zählprozess vorstellen. Vielmehr ist es gut, wenn ein (Vorschul) Kind langsam und korrekt bis über 15 zählen kann, kleine Patzer bei 17 oder 18 sind unerheblich. Problematisch ist allerdings, wenn ein Kind nicht „weiterzählen“ kann und stattdessen immer bei der 1 beginnt („counting all“ statt dem

¹ www.bildungsserver.de, Onlineinterview, Prof. Dr. Kirstin Krajewski „Mengen, zählen, Zahlen – Entwicklungsorientierte Förderung früher mathematischer Kompetenzen“ vom 12.08.2010

sinnvollen „counting on“ Zählen) oder aber, wenn es nicht rückwärts von 7 an zählen kann.

3. „Zeige mir mit Fingern 5.“ ... „Jetzt mache 9 daraus.“ ... „Nun mache 5 daraus.“ ... „Nun mache 8 daraus.“ ... „Nun mache 3 daraus.“

Hierbei sollten nicht allein die Fingerbilder auch über 5 überprüft werden, sondern vor allem darauf geachtet werden, ob Kinder diese Bilder immer wieder zählend aufbauen. Dies wäre problematisch, da es dann nahe liegt, dass diese Kinder nicht über Kompetenzebene 3 verfügen, die oben kurz geschildert wurde und meiner Erfahrung nach diese Kinder oft auch mit Kompetenzebene 2 noch auf Kriegsfuß stehen.

Wir gehen bei dieser Fragestellung erleichternd von 5 aus und zu ihr zurück bzw. ermöglichen, dass ein Kind bei „8, mache 3 daraus“ schlicht den Teil 5 wegnimmt. Schön ist das schon, wenn man sieht, dass die Mehrzahl der Kitakinder dies können. Anregungen, was man tun kann, wenn dies nicht so ist, wenn Kinder immer wieder nachzählen, wie viele Finger es denn nun sind oder sich verzählen, finden Sie im Anschluss an diese kurze Überprüfung.

4. Bereiten Sie das Würfelbild der 5 mit einfarbigen, gleich geformten Plättchen vor, zwei oder drei weitere Plättchen liegen unsortiert deutlich neben dem Würfelbild. Zeigen sie nun kurz dem Kind das mit den Plättchen dargestellte Würfelbild – „kurz“ ist wichtig, sonst zählen aus Sicherheitsgründen viele Kinder nach:

„Wie viele sind das?“ Fordern Sie nach der hofentlich spontanen und richtigen Antwort (Risikokinder zählen ab, die Aufgaben mit den Fingerbildern und Würfelbildern sollten weitestgehend nicht zählend gelöst werden) das Kind auf: „Mache 4 daraus.“ ... „Nun mache 6 daraus.“ ... „Nun mache 3 daraus.“ ... „Zum Abschluss mache wieder 6 daraus.“

Zentral ist, dass die Kinder nicht die Gesamtmenge immer erneut nachzählen, sondern sich über verinnerlichte (Würfel)Bilder bzw. das Wissen um quantitative Grundbezüge behelfen.

5. Im Folgenden überprüfen Sie das (Anzahl)Invarianzverständnis. Die sechs Plättchen hat das Kind ja gerade selbst als Würfelbild hingelegt:

„Ich lege die Plättchen jetzt in eine Reihe. Ich nehme kein Plättchen weg und tue keines dazu. Wie viele sind es?“

Hier sollten die Kinder sie fassungslos anschauen, „weil das doch immer noch 6 sind, du hast ja

nichts dazu- oder weggetan. Es sieht doch nur anders aus.“ Da es aber eine Reihe von Kindern gibt, die nicht so argumentieren, sondern nachzählen oder gar unzutreffende Anzahlen nennen, also noch variant sind bei der Anzahlbeurteilung, diese von der räumlichen Anordnung abhängig machen, müssen wir – und das betrifft alle in der Kurzüberprüfung aufgefallenen Probleme – die mathematische Entwicklung dieser Kinder hin zu abgesicherten kardinalen Zahlvorstellungen fördern.

Das ist dann auch schon die Überprüfung gewesen. Wir müssten jetzt mit den Kindern, die Probleme hatten, im „Mengen/Anzahlsinn“ zählen lernen und darauf aufbauend kardinale Zahlvorstellungen entwickeln bzw. absichern. Dies geschieht möglichst vorschulisch – stellen Sie diese Überlegungen doch in Treffen zwischen Kita und Schule dar – oder aber in den ersten Wochen der Schulzeit, idealiter nutzt man die folgenden Anregungen in Kita **und** Schule (vergl. Video Abschnitt Kompetenzebenen vorschulischer Zahlbegriffsentwicklung auf der Materialseite der ILSA-Lernentwicklung.de). Fortbildungen zum Thema „Frühe mathematische Bildung in der Kita. Wie können Kinder vor der Schule spielerisch an Zahlen als Mengen, an einfache Operationen im Zahlenbereich bis 10 herangeführt werden?“ finden Sie unter <https://www.arbeitskreis-lernforschung.de/fortbildungen/>.

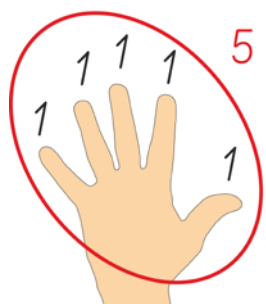
Anregung 1: Richtig zählen zum Schulbeginn

Zählen Sie mit den Kindern Objekte ab, für die es einen Oberbegriff gibt, z. B. Stofftiere oder Plättchen oder Finger (an diesem „Material“ führt kein Weg vorbei). Wichtig dabei ist, dass die Kinder langsam zählen und jedem Zahlwort sukzessiv genau ein Objekt zugeordnet wird. Achtung, beim Abzählen bis 10 hat die sieben als einzige Zahl zwei Silben. Verwendet ein Kind hier zwei Objekte, sollte man dies als Ausnahme thematisieren und nicht als Fehlverständnis im Zahlsinn festhalten.

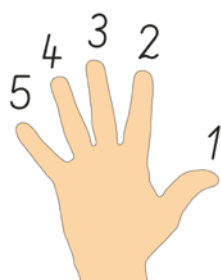
Bitte bauen Sie Zählpausen ein, z. B. 1, 2, 3 – Pause – weiterzählen: 4, 5 – Pause. Und jetzt rückwärts. Nehmen sie als eines der abzuzählenden Objekte auf jeden Fall die Finger, diese waren viel zu lange als Anschauungsmaterial aus dem Unterricht verbannt.

Vor allem aber „Bündeln“ Sie die abgezählten Objekte z. B. mit der anderen Hand oder aber in Partnerübung und nutzen sie beim Zählen immer folgendes Verbalisierungs-„Mantra“: „zusammen sind es...“ z. B. fünf Finger.

Das resultative Zählen
enaktiv unterstützt



Das positionale Zählen
enaktiv unterstützt



Es sieht nur gleich aus!

Nutzen Sie auch das „Atomspiel“: Ihre Klasse/Gruppe läuft durcheinander herum, Sie sagen eine Zahl zwischen 1 und 10 und die Kinder sollen sich an den Händen fassen in z. B. 5er Atomen/Gruppen „wir sind zusammen 5“ „wir auch“, „wir sind auch zusammen 5“... „wir nicht, wir sind zusammen 3, wir sind weniger“.



Anregung 2: Nächstes Spiel, Anzahlvergleich

Vielleicht kennen Sie das Spiel **Hamstern** aus dem Schulbuch „Fredo“ oder aber von der „PIK-AS“ der Uni Dortmund oder aber der ILSA-Lernentwicklung. Dieses Spiel wurde von Lilo Verboom entwickelt und ist ideal geeignet, die Begriffe „mehr – weniger – gleich viel“ und einen nicht abzählenden Mengen/Anzahlvergleich aufzubauen, den Blick für Differenzmengen zu schärfen und zu Beginn der ersten Klasse das Gleichheitszeichen einzuführen.

Es ist ein Würfelspiel mit klassischem Sechser-Würfel, später in der ersten Klasse kann auch ein Zehner-Würfel genutzt

werden. Zwei Mannschaften oder aber Personen spielen gegeneinander. (vergl. Video Abschnitt „Hamstern“)

Sofern die eine Mannschaft eine 3 gewürfelt und drei Plättchen in ihre Säule gelegt hat, sagen sie „wir haben 3 gewürfelt“, die andere Mannschaft hat z. B. eine 5 gewürfelt und sagt dies. Jetzt gilt es zu verbalisieren, wer mehr bzw. weniger gewürfelt hat und – vor allem – bis wohin es gleich viele sind („Legt den schwarzen Stab immer dorthin, bis wohin ihr gleich viele habt.“) Seht ihr jetzt, wie viele ihr mehr habt? Nur die, die mehr sind, dürft ihr hamstern, der Rest kommt wieder in die Schachtel.

Spielanleitung (2 bis 4 Mitspieler)

Sie benötigen:

1 x Spielfeld (siehe nächste Seite; evtl. als Kopie)

2 x 3 x 30

1 x 150mm 10mm

Abb. 1

Jede Spielgruppe (A und B) erhält einen Würfel und eine Schachtel zum Sammeln der Chips. Nebenan wird die Bank mit den 30 Chips hingestellt. A beginnt zu würfeln und würfelt z. B. eine . Die Spielgruppe A darf sich vier Chips aus der Bank nehmen und legt sie in ihr Spielfeld.

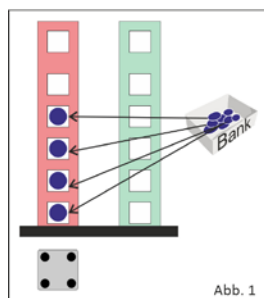


Abb. 1

Abb. 2

Nun würfelt die Spielgruppe B. Sie würfelt z. B. eine . Aus der Bank nehmen sie sich nun sechs Chips und legen sie in ihr Spielfeld.

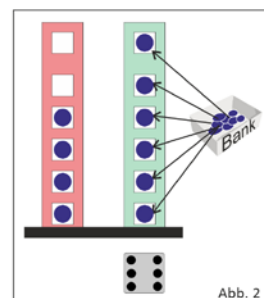


Abb. 2

Abb. 3

Der schwarze Stab wird nun genau an die Stelle gelegt, wo beide Spielgruppen noch gleich viele Chips haben. Zusammen mit dem schwarzen oberen Strich symbolisiert dies das Gleichheitszeichen.

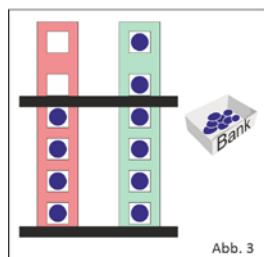


Abb. 3

Abb. 4

Diejenigen Chips, die eine der Spielgruppen mehr hat (im Beispiel die Spielgruppe B), kommen in ihr Kästchen hinein.

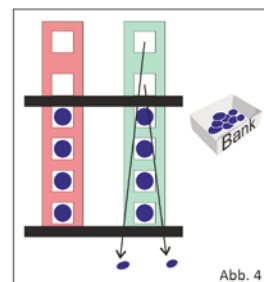


Abb. 4

Abb. 5

Alle anderen Chips kommen zurück in die Bank.

Der schwarze Stab wird zur Seite gelegt und die nächste Runde kann beginnen.

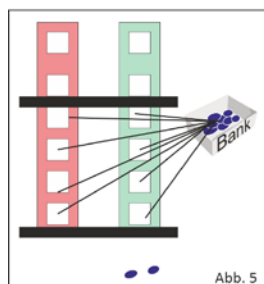


Abb. 5

Es wird so lange gespielt, bis die Bank keine Chips mehr ausgeben kann.

Wer am Ende die meisten Chips gehamstert hat, gewinnt.



Was geschieht also? Die Kinder legen in einem sehr überschaubaren Rahmen (bis 1 mehr als 5) Anzahlen und vergleichen diese nach den Kriterien „mehr als“, „weniger als“ und „gleich viele“. Im Spiel fällt auf, dass signifikant weniger abgezählt wird, als wenn wir Plättchen legen oder in einem Arbeitsblattformat die Frage nach mehr/weniger stellen. Zudem können wir so ziemlich leicht und zu Beginn ihrer Schulzeit mit den Kindern das Gleichheitszeichen einführen, dies würde ich der Kita nicht empfehlen.

Und, darin hat sich das Spiel als besonders hilfreich erwiesen, Kinder schulen ihren Blick auf die Anzahldifferenz: „Wir dürfen zwei hamstern.“ „Warum denn, ihr habt doch 5 gewürfelt?“ „Ja aber die anderen hatten ja drei und 5 ist 2 mehr als 3.“

Solche Verbalisierungen zu fördern ist dann Aufgabe der Lehrkräfte. Der Blick dazu wird ohnehin geschult und wir bewegen uns auf Kompetenzebene 3 nach Prof. Krajewski. Ohnehin finde ich es ausnehmend interessant, welche Bedeutung ein solches Vorwissen hat und wie kolossal wichtig es wäre, dies bereits vorschulisch zu fördern: „Wie die Langzeitstudien zudem zeigen konnten, sind es tatsächlich vor allem die früh vorhandenen Mengen-Zahlen-Kompetenzen, die einen Einfluss auf die Mathematikleistungen der Grundschule haben. Darüber hinaus ist es weit weniger bedeutend, wie intelligent ein Kind ist. D. h. in den Langzeitstudien waren selbst Kinder mit geringeren intellektuellen Fähigkeiten im Mathematikunterricht der Grundschule erfolgreich, wenn sie bereits im Vorschulalter über ein Verständnis für die Verknüpfung von Zahlen mit Mengen verfügten.“ (www.bildungserver.de, Onlineinterview, Prof. Dr. Kirstin Krajewski „Mengen, zählen, Zahlen – Entwicklungsorientierte Förderung früher mathematischer Kompetenzen“ vom 12.08.2010)

Ohnehin arbeiten wir in den Vorschlägen fortwährend mit kardinalen Zahlenvorstellungen, die es weiter abzusichern gilt. Lassen Sie bitte die Ordinalzahlen erst mal weg, bis ihre Kinder sicher im Zahlenraum bis 10 rechnen können, das verwirrt sonst und fürs Rechnen sind Ordinalzahlvorstellungen eher hinderlich.

II. (Kardinal-)Zahlen als Zusammensetzung aus anderen Zahlen im Sinne des Teile-Ganzes-Konzeptes verstehen anhand von Fingerbildern und daraus das Addieren und Subtrahieren im Zahlenraum 10 aufbauen

Entgegen verbreiteter Vorstellungen beginnt, wie ich bisher zu zeigen versucht habe, die Problematik beim Erlernen des Rechnens nicht erst, wenn Kinder sich nicht vom Zählen lösen können. Dennoch muss man betonen, dass „zählen“ keinesfalls „rechnen“ ist, vielmehr ersetzt „rechnen können“ das fehleranfällige und konzentrationsaufwändige „immer abzählen zu müssen“. Die Formulierung „zählendes Rechnen“ möchte ich daher nicht verwenden.

Festhalten möchte ich, dass bei Kindern, die am Ende der ersten Klasse Aufgaben im Zahlenraum 10 noch abzählen, das wichtigste Lernziel der Mathematik der ersten Klasse nicht erreicht ist. Diese Kinder sind allemal schwach im Rechnen und werden voraussichtlich in der zweiten Klasse unfähig beim erweiterten Rechnen im Zahlenraum 10 scheitern. Gelingt im ersten Schuljahr also die Ablösung von reinen Zählprinzipien hin zu einer kardinalen Zahlvorstellung und darauf aufbauenden operativen Rechenstrategien im Sinne des Teile-Ganzes Konzeptes nicht, ist dies nicht der Beginn, sondern oft bereits die Verfestigung einer Rechenschwäche. Daher kommt dem zählfreien Rechnen im Zahlenraum 10 eine besondere Bedeutung zu und ohne dies sicherzustellen, ist ein Vorschreiten im hierarchisch aufgebauten mathematischen Denken zum Scheitern verurteilt.

Beim Rechnen bedient man sich der den Zahlen innewohnenden Strukturen, wie Vorgänger/Nachfolger bei plus oder minus eins bzw. der „Kraft der Fünf“, über die sich alle Anzahlen zwischen fünf und zehn gliedern. Ich möchte gleich daran andocken, aber mit Ihnen zuvor noch die Relevanz des Aufbaus von Kernbildern für Anzahlen bis fünf besprechen, über die fast alle Kinder bereits zu Beginn ihrer Schulzeit verfügen.

Was möchte ich Ihnen also zur Entschärfung der zweiten Hürde, dem Erlernen des zählfreien Rechnens, zuvorderst als Material empfehlen? Ihre Finger sollen die Kinder anschauen und als Fünfer und zehnerstrukturiertes Material verstehen lernen, um dann beim Rechnen im Zahlenraum 10 mit Fingern „klappend“, die Fingerbilder zum Rechnen lernen zu nutzen, statt an den Fingern einzeln abzuzählen.

Es gibt mehrere Argumente, warum Kinder ihre Finger zum Rechnen nutzen sollten:

- Fingerbilder bis 5 sind nahezu allen Kindern zum Zeitpunkt des ersten Schultages bekannt, haben sie sie doch vorschulisch oft schon genutzt, um Anzahlen zu visualisieren. Andere Materialien, wie das ebenfalls empfehlenswerte Zehnerfeld, sind neu für die Kinder.

- Kein Material kann so zählfrei genutzt werden wie die Finger. Malen Sie sieben Plättchen in einem Zehnerfeld an und klappen Sie danach sieben Finger auf. Was ging schneller, was verführt eher zum Zählen?

- Warum haben wir ein Zehnersystem, warum können Mathematikdidaktiker mit Fug und Recht von der „Kraft der Fünf“ sprechen? Genau, wegen der Fünferstruktur unserer Finger und das an zwei Händen, was sich zur 10 summiert.

Beginnen wir mit „Kernbildern“ bis 5, an einer Hand dargestellt. Kulturell gibt es da durchaus Unterschiede: Sowohl der Daumen als auch der kleine Finger als auch der Zeigefinger werden zur Visualisierung der 1 genutzt. Es sollte uns egal sein, welchen dieser Finger ein Kind für die 1 nutzt, die Position kann wechseln, die Anzahl bleibt dieselbe. Das ist eine erste, nicht zu verachtende Erkenntnis, die dann auch auf die Kernbilder der 2, 3 und 4 übertragen werden sollte, Hauptsache die z. B. 3 wird gebündelt gezeigt. 2 und 3 sind simultan erfassbare Anzahlen/Mengen. Eine Besonderheit nimmt die 4 ein. Überprüfen Sie es einmal selbst, in der Regel wissen Sie, dass sie 4 aufgeklappt haben, weil einer bis zur 5 fehlt. Es sind also 4, weil einer von 5 eingeklappt ist (vergl. die römischen Zahldarstellungen) und das ist bereits ein Moment der Kraft der 5 und ein strukturelles Wissen um Bezüge zwischen Anzahlen. Beschreiben sie mit den Kindern die Fingerbilder in Bezügen zur 5 und zu ihrem Vorgänger und Nachfolger.

0 ist dargestellt, wenn kein Finger aufgeklappt ist. Wie viele Finger sind dann wohl eingeklappt?

Besprechen sie diese Kernbilder, lassen Sie die Kinder beschreiben was sie an ihrer Hand sehen, wie die Bezüge der Anzahlen untereinander wahrgenommen werden. Wir werden diese abgesicherten Bilder brauchen, wenn wir im Folgenden auf Kernstrukturen mit Fingerbildern erweitern.



Einerseits ist eine Kernstruktur immer Vorgänger/Nachfolger und der Bezug zur 10. Letztere können Sie gut thematisieren, indem sie besprechen, wie viele eingeklappt und wie viele entsprechend aufgeklappt sind, zusammen sind es immer 10. Andererseits – und das ist fürs spätere Rechnen die zentrale Kernstruktur – ist eine Kernstruktur auch das Kernbild der 5 (Hand voll aufgeklappt) und ein weiteres Kernbild auf der anderen Hand. Zur Überprüfung für Sie: Klappen Sie ganz schnell sieben Finger auf. Es gibt nur zwei Möglichkeiten, zu überprüfen ob es wirklich 7 sind. Entweder Sie zählen sie ab oder aber Sie vertrauen der Kernstruktur in Form der (Kern)Bilder 5 und 2. Letzteres ist die Vorwegnahme des Teile-Ganzes Konzeptes und sollte unbedingt auch an anderem Material, wie einem Zehnerfeld abgesichert sein, bevor Sie die Addition und Subtraktion einführen.

„Blitzblick“ Übungen zum Erkennen von Kernstrukturen in Gesamtmengen größer 5 sind hier schön. Welche Anzahl ist hier dargestellt? Man kann das gut als „Warm up“ zu Beginn einer jeden Mathestunde mit Fingerbildern und Zehnerfeldern angehen. Nutzen Sie bitte für diese Unterrichtssequenz nicht nur Video1, sondern auch das auf „ILSA-Lernentwicklung.de“ für Sie auf der Startseite zusätzlich zu den Videos bereitgestellte Material.

Daran andocken sollten sich nun die Begriffe Ganzes und Teile.

„Ich zeige dir sechs Finger, der eine Teil davon ist die 5, was ist der andere Teil?“

Bleiben Sie bei der Einführung dieser Benennung bitte bei Kernstrukturen, wir sind hier nicht bei den klassischen Zahlzerlegungshäuschen. Die Kinder müssen erstmal nicht alle Zerlegungen kennen, sie sollen es mit der Erkenntnis, was hier Ganzes und was Teile sind, leicht

gemacht bekommen und über unsere Kernstrukturen (volle 5 und Kernbild) ist das gut möglich.

Schauen Sie, inwiefern Sie Ihr Lehrwerk durch die „Vokabeln“ Teile/Ganzes und Übungen zu Kernstrukturen mit Fingerbildern und Zehnerfeldern ergänzen können, die Kinder werden es Ihnen danken, denn die Hürde beim Einführen von Addition und Subtraktion ist nun schon erheblich niedriger als ohne Fingerbilder, Kernstruktur-Wissen und beginnendes Teile-Ganzes Konzept (mit Vokabeln).

Was nun folgen kann, ist die Einführung von Addition und Subtraktion gemeinsam.

Immer wieder werde ich bei Fortbildungen gefragt, ob diese Gleichzeitigkeit für schwächere Schüler nicht zu schwer sei. Das Gegenteil ist der Fall: Klappen Sie doch bitte einmal drei Finger auf, jetzt klappen sie an der gleichen Hand zwei weitere Finger hinzu. Genau, das waren die Teile 3 und 2, zusammen ist das Ganze dann 5. Nun haben Sie das Ganze 5 aufgeklappt, klappen sie jetzt 2 ein, dann bleibt der Teil 3 übrig. Was war nun schwerer, die Addition oder die Subtraktion? Sie waren beide gleich leicht. So müsste das gleich bei der Einführung der beiden Operationen kommuniziert und veranschaulicht werden. Es geht um die Einführung der Operationen mit Fingerbildern direkt als Umkehrungen und Erleichterungen fürs Rechnen: Von den Teilen zum Ganzen beschreibt das Addieren, vom Ganzen zu den Teilen das Subtrahieren.

Wenn Kinder hierzu die Finger klappen sollen und wenn Sie mit ersten Übungen zunächst nur bis zum Gesamten 5 und danach bis zum Gesamten 10 nur entlang von Kernstrukturen Aufgabenstellungen aufbauen, also $5 + 2 =$ oder $7 - 2 =$, dann haben Sie sehr hohe Chancen, dass Kinder nicht zurück ins Zählen fallen, sondern erste Schritte der Addition, aber auch zur Subtraktion zählfrei gehen. Im Prinzip müsste sich das nun verstetigen, bevor wir in die „schweren“ Aufgaben einsteigen, wie etwa $7 - 4$. In der abgebildeten Tabelle sehen Sie, welche Aufgaben alle durch Nachfolger, analog dazu Vorgänger und durch Rechnen mit Kernstrukturen (vergl. Video Abschnitt „Kernstrukturen“) gelöst werden können und wie wenige andere Aufgaben übrigbleiben.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Aufgaben insgesamt
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	64
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
2	2	3	4	5		7	8	9	10		
3	3	4	5			8	9	10			Rest
4	4	5				9	10				6
5	5	6	7	8	9	10					
6	6	7	8	9	10						
7	7	8	9	10							
8	8	9	10								
9	9	10									

KS 3
KS 1
KS 2

Nun gilt es noch, Lückenaufgaben einzuführen, Rechengeschichten zu Aufgaben zu zeichnen, Bildergeschichten in Rechenaufgaben zu übertragen und immer wieder sollte man sich vergewissern, was z. B. gegeben oder gesucht ist: das Ganze oder ein Teil? Lassen Sie dies auch ein Mantra ihres Mathematikunterrichtes werden: „Markiere das Ganze, ist es gegeben oder gesucht?“

$$5 + 4 = \underline{\quad} \quad 3 + \underline{\quad} = 8 \quad 7 - 2 = \underline{\quad} \text{ aber auch}$$

$$\underline{\quad} - 3 = 5$$

„Markiere das Ganze, bevor du rechnest, ist es gesucht oder gegeben?“

Sichern Sie inklusive aller Rechengeschichten, Bildergeschichten, Lückenaufgaben und Aufgaben mit und ohne Kernstruktur das Rechnen im Zahlenraum 10 ab. Danach wird es nochmal spannend. Ich möchte mir mit Ihnen und auch mit den Kindern den Zahlenraum bis 20 sparen. Ich möchte direkt die dritte Hürde angehen: das Stellenwertsystem. Und dieses Vorgehen möchte ich zuerst begründen.



III. Das Stellenwertsystem und erstes dekadisches Rechnen

Das mit dem dekadischen Positionssystem einhergehende Rechnen mit zweistelligen Zahlen stellt eine zentrale weitere Hürde für Kinder beim Erlernen des Rechnens dar. Daher liegt es nahe, dass wir uns darum kümmern müssen. Der Zahlenraum bis 20 hat zuerst einmal die Funktion, mit Kinder Analogien zum Zahlenraum 10 bei zweistelligen Zahlen, Einern **und** Zehnern zu erarbeiten. Ich denke aber nicht, dass es Kindern, wenn sie Analogien entdecken, schwerer fällt, diese bei $30 + 7$ zu entdecken als bei $10 + 7$. Es sei denn, man geht davon aus, dass Kinder „so weit in der ersten Klasse noch nicht zählen können“. Umso besser möchte man denken, erinnern wir uns: Zählen sollten Kinder ohnehin nicht mehr, wenn man gedenkt, über den Zahlenraum 10 hinauszugehen: „Zählmethoden als einzige Lösungsstrategie über das erste Schuljahr hinaus zu tolerieren, ist unterlassene Hilfeleistung und bewirkt, dass sich Unterschiede zwischen schwachen und befähigten Schülern ständig vergrößern.“ (Prof. Gerster 1996, Vom Fingerrechnen zum Kopfrechnen; Schriftreihe der PH Heidelberg, Bd. 25)

Ein weiterer Aspekt, warum ich den Zahlenraum 20 in der aktuell in Schulbüchern gängigen Form nicht für sinnvoll erachte ist, dass seit jeher in unserer Arbeit mit rechenschwachen Kindern aufgefallen ist, dass diese in der ersten Klasse das zehnerüber- und unterschreitende Rechnen im Zahlenraum 20 nicht verstehen. Es ist auch bei vielen nicht rechenschwachen Schülern immer wieder zu beobachten, dass die Über- und Unterschreitungen in der ersten Klasse nur rudimentär verstanden werden. Sie müssen nach den Sommerferien in der zweiten Klasse im Zahlenraum 20 wiederholt und nach der Zahlenraumerweiterung auf 100 in der zweiten Klasse erneut thematisiert werden. Vielen Kindern erscheint dieses Thema selbst im dritten Angang noch neu.

Um es kürzer zu machen: Unserer Beobachtung und Analyse nach kommt das über- und unterschreitende Rechnen im Zahlenraum 20 einfach zu früh: Einige Kinder haben sich zu diesem Zeitpunkt in der ersten Klasse noch nicht wirklich vom Abzählen gelöst, alle haben noch nicht lange auf symbolische Weise gerechnet. Und überhaupt, warum ein Zahlenraum 20? Bezüglich der Addition und Subtraktion ist z. B. $17 - 9$ eine sehr komplexe Anforderung, viel aufwendiger als z. B. $87 - 7$ und letztere Aufgabe gehört ja

immerhin bereits zum Rechnen im Zahlenraum 100.

Und dann gibt es ja noch die verschiedenen Strategien der Über- und Unterschreitung, die von Kindern bereits in der ersten Klasse gefordert werden und die viele Kinder endgültig überfordern. Selten versteht ein Drittel der Klasse in der ersten Klasse die Berechnung von $8 + 9$ über verschiedenste Wege: Mit 10er Trick ($8 + 10 - 1$), mit 5er Trick ($5 + 5 + 3 + 4$), mit Dopplertick ($8 + 8 + 1$) und „klassisch“ im Teilschrittverfahren ($8 + 2 + 7$). Ich plädiere dafür, alle Über- und Unterschreitungen wegen ihrer Komplexität in die zweite Klasse zu verschieben und stattdessen nach der Absicherung des Rechnens bis 10 das Stellenwertsystem und damit den Aufbau zweistelliger Zahlen über Zehner und Einer einzuführen. Dafür ist mir neben dem Argument der Überforderung durch Über- und Unterschreitungsalgorithmen wichtig, dass es für Kinder sehr logisch und unserer Erfahrung nach auch einfach ist, nach dem Erlernen des Rechnens im Zahlenraum 10 direkt das Stellenwertsystem, den Bezug von Einern zu Zehnern zu thematisieren und Vorstellungen, Handlungskompetenzen und Bilder aufzubauen, die den Zusammenhang zwischen Einern und Zehnern griffig absichern.

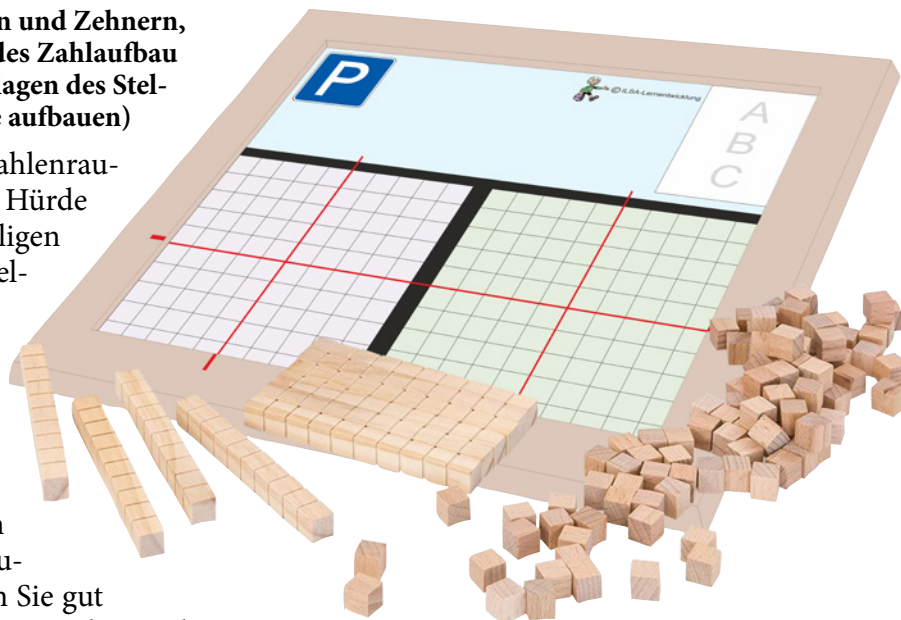
Über- und Unterschreitungen sind dann im zweiten Schuljahr Thema auf Basis längeren Rechnens und vor allem auf Grundlage der Erarbeitung der Stellenwerte, des Wissens um den Zusammenhang von Einern und Zehnern, des ausgiebigen Handelns an Materialien und der Verinnerlichung von entsprechenden Bildern.

Unserer Erfahrung nach ist für rechenschwache Kinder dieses Vorgehen erheblich leichter und von nachhaltigerem Verständnis und mehr Freude am Rechnen sowie dem Erkennen mathematischer Zusammenhänge geprägt. Wir empfehlen ein solches Vorgehen aber auch für die gesamte Klasse, verbindliche Anforderungen müssen sie ohnehin erst Ende der zweiten Klasse erfüllt haben und wenn etwas dran ist, dass in der ersten Klasse ohnehin wenige Kinder die flexiblen Wege der Über- und Unterschreitung verstehen, sparen wir uns Zeit und Frust in den Klassenzimmern durch ein solches Vorgehen. Zudem verliert in der ersten Klasse durch einfaches dekadisches Rechnen wie $70 + 3$ und $73 - 3$ mit (Dienes)Material das Rechnen mit „großen Zahlen“ (Zahlenraum 100) seinen Schrecken.

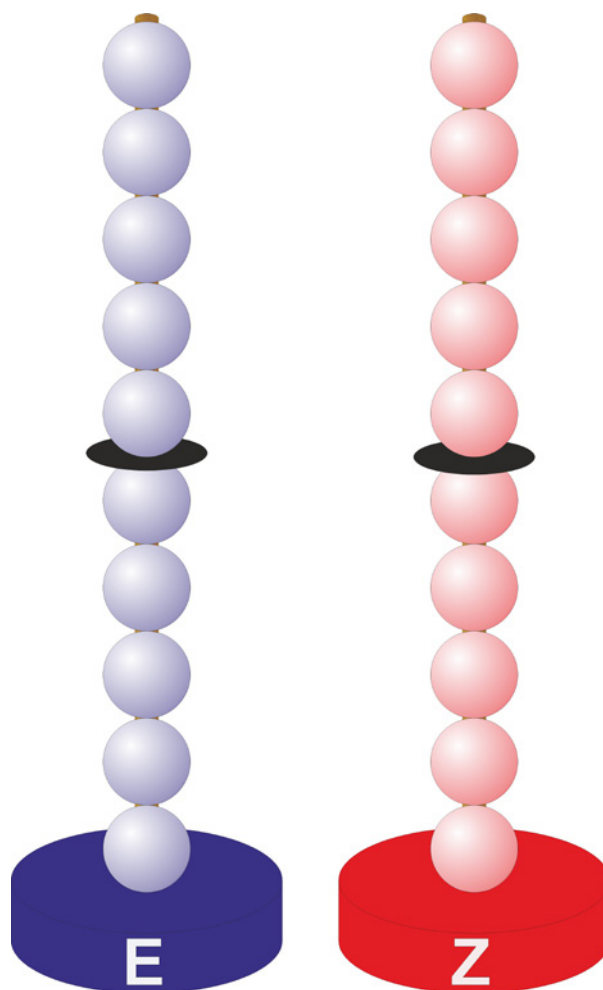
Das Verhältnis zwischen Einern und Zehnern, über Tauschprozesse und den des Zahlaufbau bis 100 verinnerlichen (Grundlagen des Stellenwertsystems in der 1. Klasse aufbauen)

Was würde ich an Stelle des Zahlenraumes 20 empfehlen, um die Hürde des Rechnens mit zweistelligen Zahlen, das Rechnen mit Stellenwerten, niedriger zu gestalten? Bündelungs- und Tauschprozesse zwischen Einern und Zehnern nach Absicherung des Rechnens im Zahlenraum 10 – und zwar möglichst mit Spielen und unbedingt mit Anschauungsmaterial. Hierbei können Sie gut auf die in ihren Klassenzimmern sicher vorhandenen Dienes (Holz)Materialien (Einerwürfel, Zehnerstangen) und verschiedenfarbige Plättchen für Einer (z. B. blau) und Zehner (z. B. rot) zurückgreifen. Ich arbeite in diesem Zusammenhang gerne mit den im Video (vergl. Video Abschnitt Einführung des Stellenwertsystems und zweistelliger Zahlen) dargestellten Materialien und Spielen. Wandeln Sie Methoden und Materialien ab, wie es zu Ihrer Klassensituation passt, aber bitte stellen Sie in den Vordergrund: Immer, wenn zehn von der Sorte Einer, blaue Kugeln/Plättchen oder Holzklötzchen gesammelt wurden, **muss** gegen eine Zehnerstange, eine rote Kugel/ ein rotes Plättchen getauscht/gewechselt werden.

Zur Einführung geeignet wären Quizfragen und die Kinder erhalten für jede richtige Antwort ca. vier bis sechs Punkte. Um sich die Punktezahl auch nach mehreren Antworten merken zu können, repräsentiert jede z. B. blaue Kugel oder jedes Einerklötzchen einen Punkt. Regel bei diesen Spielen ist, dass – um den Punktstand übersichtlicher zu gestalten – immer, wenn ich 10 blaue Kugeln habe (auf den abgebildeten Ständer passen max. 10!), diese gegen eine rote gewechselt werden müssen. Natürlich kann derselbe Wechsel auch mit Einerklötzchen und einer Zehnerstange vollzogen werden. Der Nachteil hierbei ist, dass ich immer mehr Einerklötzchen dazulegen kann. Bitte unterstützen Sie die Kinder durch einen Rahmen ähnlich dem abgebildeten, in dem die Zehnerstruktur verdeutlicht ist und Zehner und Einer gut in ihrem Bezug zur 10 – ohne nachzuzählen – erfasst werden können.



Nun geht es schlicht um fortwährendes Tauschen: „Ich habe zehn Punkte zusammen, jetzt tausche ich die zehn Einerpunkte gegen einen Zehnerpunkt, die restlichen Einerpunkte lege ich rechts daneben“. Jetzt hat jede Mannschaft, sofern Gruppen ein solches Quiz gegeneinander spielen, z. B. 25 Punkte: „Weil wir zwei rote und fünf blaue Kugeln haben.“ „Wer hat mehr Punkte oder aber habt ihr gleich viele...?“



Es geht darum, den Tausch zwischen Einern und Zehnern in einem netten Setting enaktiv zu vollziehen, „ich tausche 10 Einer gegen 1 Zehner“ und den Punktstand zu versprachlichen, ihn zu notieren in einer Stellenwerttafel und sich über das Material immer wieder Bilder zu den Punktständen, also den in Einer und Zehnern gegliederten Zahlen vor Augen zu führen.

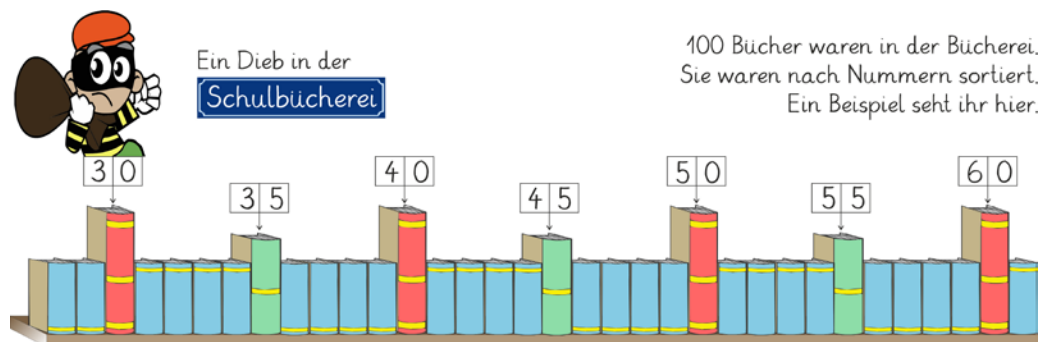
Jede Frage nach dem Punktstand der Mannschaften thematisiert den Zahlaufbau zweistelliger Zahlen durch Einer und Zehner und da alle Kinder in einer solchen Phase dauerhaft mit Material arbeiten, sichern sich zunehmend Vorstellungen vom Zahlaufbau im Zahlenraum 100 ab.

Wenn die Handlungen an den Kugeln, Einerklötzchen oder Ähnlichem, die entsprechenden Bilder dazu und ihre Übertragungen auf die zweistelligen, aus Stellen und entsprechenden Werten bestehenden Zahlen nicht verinnerlicht sind, wenn Zahlen nicht durch innere Bilder von Quantitäten unterfüttert sind, dann macht Rechnen im Zahlenraum 100 keinen Sinn. Mit einem solchen Aufbau kann aber bereits früh – und der Entwicklung von Erstklässlern ange-

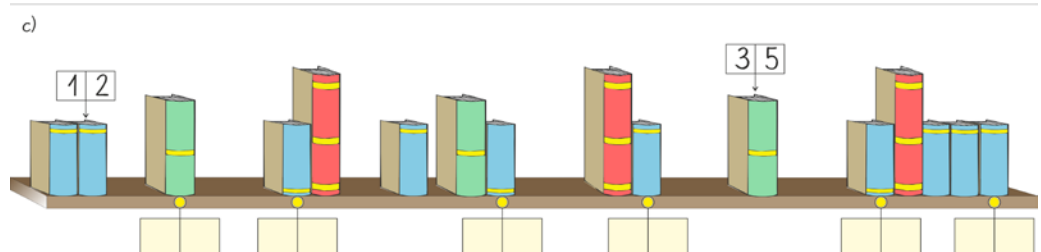
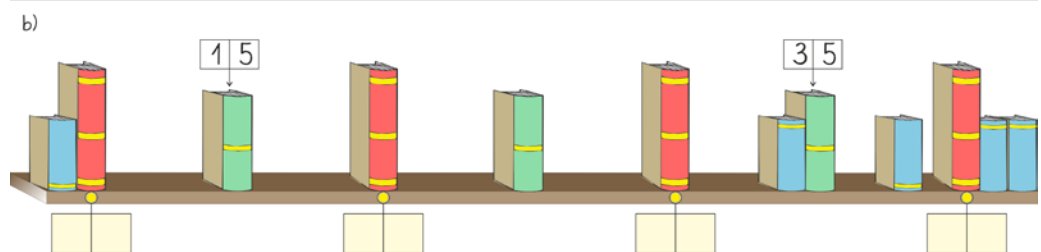
passt – der Zahlaufbau im Zahlenraum 100 erarbeitet werden.

Sind die angesprochenen Handlungen, Notationen und Bilder thematisiert, gilt es, sich im erarbeiteten Zahlenraum 100 zu orientieren, bevor Sie erste dekadische Rechnungen angehen. Bitte schreiten Sie in den folgenden Wochen nicht zu schnell voran und direkt auf die Zehnerübergänge zu („Weil wir die noch nicht hatten.“): Alle Kinder brauchen eine sichere Orientierung „was ist der Zehner, was der Einer“, welche Zahl setzt sich *wie* aus Zehnern und Einern zusammen, welche Nähen haben die Zahlen zu den sie umgebenden Zehnern und Fünfern. Spielen sie Mr. X oder Zahlenrätsel wie in Video 2 gegen Ende dargestellt und suchen Sie mit den Kindern Zahlen an einem nur spärlich beschrifteten Zahlenstrahl.

Führen Sie zunächst einen komplett beschrifteten Zahlenstrahl ein. Nehmen sie dann die Einermarkierungen heraus. Auf dem Strahl sind dann nur 10er und 5er Markierungen und davon sind dann am Ende einer solchen Sequenz nur wenige Positionen beschriftet. In dem dargestellten Beispiel



Einige Nummern der Bücher hat die Hausmeisterin vergessen. Sie hat dort ein gelbes Schild hingehängt. Kannst du ihr Helfen? Welche Nummern haben die Bücher? Schreibe die Zahl auf das Schild.



ist der Zahlenstrahl in eine Geschichte vom „Dieb in der Schulbücherei“ eingebettet, das braucht man nicht, aber es soll verdeutlichen, wie sich die Kinder orientieren können (an 10ern und 5er Stationen). Für in Mathematik starke Kinder kann man an diesen Inhalten andockend gut differenzieren, indem sie von den ermittelten Zahlen die Differenz zu den Nachbarzehnern benennen, eventuell sogar eigenständig die dazu passende Rechenaufgabe formulieren. „Die gesuchte Zahl war 43. Von 43 sind es drei Einer bis zur 40 und sieben Einer bis zur 50. $43 - 3 = 40$, $43 + 7 = 50$.

Die verbreitete Hundertertafel hingegen ist nicht sonderlich geeignet, da sie zu sehr zum Abzählen einlädt und z. B. die 24 gleich weit von der 25 entfernt ist wie von der 34. Eine solche Orientierung wäre doch genau das, was wir im Ausgangspunkt vermeiden wollten: Ein Einer zählt nicht gleich viele Punkte wie ein Zehner.

Dann aber, wenn eine zutreffende Orientierung im Zahlenraum 100 angebahnt ist, können Sie das Rechnen im Zahlenraum 100 über einstufige, zuerst rein dekadische (z. B. $40 + 7$, $47 - 7$) Rechenprozesse, bereits in der ersten Klasse beginnen. Solche Rechnungen sollten durchgängig von Bildern und/oder Handlungen an konkretem Material und immer wieder durch das Besprechen passender Rechen-

geschichten begleitet werden. Auch hier gilt: Material darf nicht nur von einigen, sondern soll von allen Kindern immer wieder benutzt werden.

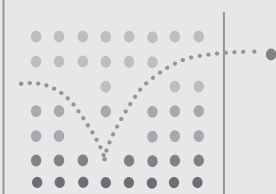
Alle Kinder können so bereits in der ersten Klasse im Zahlenraum bis 100 mit „einfachen“ Aufgaben – viel einfacher als bei $16 - 9$ – Rechenerfahrungen sammeln. Das sich so einstellende Selbstbewusstsein („Ich rechne schon bis 100 und das ist gar nicht so schwer.“) ist nicht nur schön für die Kinder, sondern hat eine enorme Produktivkraft für den entsprechenden Mathematikunterricht.

Zweistufige Rechenprozesse ($24 + 35$) und dreistufige Rechenprozesse ($78 - 9$) also die Zehnerüber- und Unterschreitungen und deren Flexibilisierung können jetzt auf sicherem Fundament erarbeitet werden und in der zweiten Klasse auch tragfähig verstanden werden. Natürlich bedürfen die Zehnerüber- und Unterschreitungen noch der besonderen Aufmerksamkeit, aber dazu ist in diesem Journal schon viel geschrieben worden und wer dazu noch Anregungen möchte, den verweise ich gerne auf das freigeschaltete Video 3.

Ich hoffe, Ihnen Anregungen für ihren Unterricht und zur Reflexion gegeben zu haben, eventuell helfen ja die Videos noch weiter, die unter **ILSA-Lernentwicklung.de** auf der Material-Seite angeboten werden.



Verein für Lerntherapie und Dyskalkulie e.V.



Internet:
www.dyskalkulie.de
E-Mail:
verein@dyskalkulie.de

Impressum:

Herausgeber: Verein für Lern- und Dyskalkulietherapie, München, Briener Straße 48
Redaktion: Alexander v. Schwerin (verantwortlich), Beate Lampke, München
Hans-Joachim Lukow, Osnabrück
Christian Bussebaum, Düsseldorf;
Endkorrektur: Martina Schneider, Köln
Layout und Satz: Schmidt Media Design, München

MLI Mathematisch-Lerntherapeutisches Institut Institut zur Therapie der Rechenschwäche / Dyskalkulie

Förderdiagnostik – Beratung – Lerntherapie – Lehrerfortbildung
Kurfürstenstr. 8, 40211 Düsseldorf

Telefonprechstunde:
Mo. – Fr. 11.00 – 13.00 Uhr
Tel.: 0211 – 1710667, Fax: 0211 – 1710668
E-Mail : mli@rechenschwaechе.org, Internet: www.rechenschwaechе.org



Für die folgenden Veranstaltungen ist eine Anmeldung mit Angabe der Rechnungs-E-Mail-Adresse notwendig.

Lehrerfortbildung Modul 1 online (Lehrer)

Dienstag, 16. April 2024, 12–16 Uhr, Kosten 50 € je TL

**Rechenschwäche vermeiden, worauf muss ich im Unterricht achten?
Unterrichtskonzeption Anfangsunterricht Zählen durch Rechnen ersetzen, den ZR 10 verstehen**

Lehrerfortbildungsmodul 2 online (Lehrer)

Mittwoch, 24. April 2024, 12–16 Uhr, Kosten 50 € je TL

**Rechenschwäche vermeiden Teil 2:
Das Stellenwertsystem, Rechnen im ZR 100 Multiplikation/Division**

**Anmeldung jeweils unter mli@rechenschwaechе.org,
Sie erhalten mit der Anmeldebestätigung ihre Zugangsdaten.**

**Anmeldungen nur per E-Mail an mli@rechenschwaechе.org unter Angabe ihres Namens
und der Rechnungsadresse (Rechnung kommt per E-Mail nach Modul 2!).**

Online-Elternabend

Das MLI lädt Sie zu einem kostenlosen Zoom-Meeting ein.

Donnerstag 16. Mai 2024, von 19:30 Uhr bis ca. 21:15 Uhr

zum Thema

Rechenschwäche – Was kann ich tun? Was sollte ich lieber lassen?

Dieses Treffen veranstalten wir virtuell über die Zoom-Plattform.

Eine Anmeldung ist nicht erforderlich.

So treten Sie dem Zoom-Meeting bei:

- Nur mit Ihrem Browser unter der Adresse:
zoom.us/j/94136933618 und dem Kenncode/Passwort: 416346
- Alternative: Vorab den Zoom-Client (alias Zoom-App) installieren und sich darüber mit der Meeting-ID: 941 3693 3618 und obigem Kenncode/Passwort anmelden.

Weitere Veranstaltungen/Informationen unter ILSA-Lernentwicklung.de